Blatt 4 (Ausgabe am 09.11., Besprechung am 13.-15.11.)

Aufgabe 15: Teilchen im Kasten

a) Zeigen Sie, dass die Normierungskonstante A für alle Wellenfunktionen, die ein Teilchen in einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite L beschreiben, den Wert $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ hat.

b) Der über viele Messungen gemittelte Wert $\langle x \rangle$ für den Erwartungswert des Ortes eines Teilchens, das sich im unendlich hohen Potentialtopf der Breite L befindet, ist durch

$$\langle x \rangle = \int x \, |\psi(x)|^2 \, dx$$

gegeben. Berechnen Sie den Wert von $\langle x \rangle$ für jeden Wert der Quantenzahl n.

Aufgabe 16: Unendlich tiefer Kasten

a) Zeigen Sie, dass die Wellenlänge der Wellenfunktion eines Elektrons in einem perfekten, unendlich tiefen Kastenpotential in jedem Zustand die deBroglie-Wellenlänge ist.

b) Ein Elektron ist in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite L gefangen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das Elektron in dem Bereich bis zu einer Entfernung von $\frac{1}{4}L$ von einer der beiden Wände zu finden, wenn es sich
   (i) im Grundzustand und
   (ii) im Zustand mit $n = 4$ befindet.
   (iii) Wie lautet die klassische Vorhersage?

Aufgabe 17: „Würfelförmiges“ Wasserstoffatom

Als einfache Vorbetrachtung für das Wasserstoffatom nehmen wir an, dass das Elektron in einem dreidimensionalen, würfelförmigen Kasten mit den Seitenlängen L und unendlich hohen Potentialwänden in allen drei Raumrichtungen eingesperrt ist. Als Seitenlängen L verwenden wir den Durchmesser der Bohrschen Bahn im Grundzustand, d.h. $L = 1 \cdot 10^{-10}$ m.

a) Wie lautet die Schrödingergleichung für dieses Problem? Bestimmen Sie die erlaubten Energiewerte des Elektrons im unendlich tiefen, dreidimensionalen Kastenpotential. Wie viele Quantenzahlen charakterisieren einen Energiewert?
<u>Hinweis</u>: Verwenden Sie als Ansatz für die Wellenfunktion einen Produktansatz aus den Wellenfunktionen des eindimensionalen Kastenpotentials, in der Form

$$\psi(\vec{r}) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z).$$

b) Wie groß wäre die Wellenlänge eines Photons, das beim Übergang des Elektrons vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand emittiert wird? In welchem Spektralbereich des elektromagnetischen Spektrums liegt diese Wellenlänge? Vergleichen Sie die Wellenlänge mit der entsprechenden Wellenlänge im tatsächlichen Wasserstoffatom (erste Linie der Lyman-Serie).

c) Können Sie eine anschauliche Erklärung geben, warum die in dem einfachen Modell berechnete Wellenlänge viel kleiner ist als die beim tatsächlichen Atom?

Aufgabe 18: Tunneln durch eine Barriere

Ein Elektron mit einer kinetischen Energie E erreicht eine kastenförmige Potentialbarriere mit der Höhe $U_0 > E$ (siehe Abbildung unten).

a) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die Bereiche $x < 0$, $0 < x < L$ und $x > L$ auf. Welchen Lösungsansatz würden Sie jeweils für die Wellenfunktionen verwenden?

b) Zeigen Sie, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit T für das Durchdringen (Durchtunneln) der Barriere, bei Vernachlässigung der Reflexion an der Barriere (Annahme dünner Barriere) gegeben ist durch $T = e^{-2\alpha L}$ mit $\alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$.

c) Angenommen, das Elektron habe eine kinetische Energie von 50 eV und die Potentialbarriere eine Höhe von 70 eV. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron die Barriere durchdringt, falls (i) $L = 1{,}0$ nm oder (ii) $L = 0{,}10$ nm ist?