Blatt 7 (Ausgabe am 30.11., Besprechung am 11.12./13.12.)

Aufgaben 29-30 dienen zur Ergänzung des Vorlesungsstoffs. Sie sind mit Hilfe des Skripts lösbar.

Aufgabe 28: Aufenthaltswahrscheinlichkeit im H-Atom

Berechnen Sie für den Grundzustand (1s-Zustand) des H-Atoms den Radius einer Kugel mit dem Kern als Kugelmittelpunkt, innerhalb derer die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Elektron

a) 50% und

b) 99% beträgt.

Geben Sie den Radius in Einheiten des Bohrschen Radius a_0 an.

Aufgabe 29: Das Elektron im elektromagnetischen Feld

Zeigen Sie, dass die klassische Hamilton-Funktion eines Elektrons im elektromagnetischen Feld

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 - e\varphi$$

lautet, wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und φ das skalare Potential des elektromagnetischen Feldes sind.

Aufgabe 30: Elektrische Dipolnäherung und höhere Momente

Auch dipol-verbotene Übergänge können auf Grund von höheren Momenten eine kleine, aber endliche Übergangswahrscheinlichkeit besitzen. Das die Übergangsraten für Absorption und Emission bestimmende Matrixelement M_{ba} ist allgemein gegeben durch

$$M_{ba} = \left\langle \psi_b \left| e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{\varepsilon} \nabla \right| \psi_a \right\rangle = \int \psi_b^* (e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{\varepsilon} \nabla) \psi_a d^3 r\,,$$

wobei $\vec{k}$ der Ausbreitungsvektor der elektromagnetischen Welle und $\vec{\varepsilon}$ der Einheitsvektor in Richtung des elektrischen Feldes (Polarisationsvektor) sind.

a) Machen Sie sich noch einmal klar, dass in der Dipolnäherung M_{ba} gegeben ist durch $M_{ba} = -\frac{m\omega_{ba}}{\hbar} \vec{\varepsilon} \int \psi_b^* \vec{r}\, \psi_a d^3 r$, also proportional zum Dipolmatrixelement ist.

b) Nehmen Sie an, dass sich die elektromagnetische Welle $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ in z-Richtung ausbreitet, und der Polarisationsvektor des elektrischen Feldes $\vec{\varepsilon}$ in x-Richtung zeigt. Zeigen Sie, dass sich der nächst höhere, über die Dipolnäherung hinausgehende Beitrag zu M_{ba} ergibt zu

$$\tilde{M}_{ba} = -\frac{m\omega_{ba}}{\hbar c} \int \psi_b^* z \dot{x} \psi_a d^3 r\,, \qquad \text{mit} \qquad \omega_{ba} = \frac{E_b - E_a}{\hbar}.$$